UTN.BA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Segundo Examen 24/02/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: ....[redacted]........

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN
[redacted]						

Todas las respuestas deben ser justificadas con el procedimiento analítico adecuado para ser tenida en cuenta. **<u>No resolver el examen en lápiz</u>**. Duración del examen: 2 horas.

Condición de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto. (uno de T1 o T2 y dos P1, P2, P3 o P4)

T1) a) Enuncie el teorema de cambio de variable en el cálculo de un integral triple, con las hipótesis correspondientes.

b) Utilizando el cambio de coordenadas adecuado describa la región de R^3 definida por:

$$V = \{(x,y,z)\epsilon R^3 / \, x \geq 0; y \geq 0; \; x^2+y^2 \leq 1 \wedge x+y \leq z \leq 9-x^2-y^2\}$$

T2) a) Enuncie el teorema de Stokes.

b) Sea $F: R^3 \to R^3$ el campo $F(x,y,z) = (y^2\cos(x)+z^3; -4+2y\sin(x); 3xz^2+2)$. Si $G: R^3 \to R^3$ el campo $G(x,y,z) = F(x,y,z) + (z,x,y)$, calcular $\oint_c G\,ds$, donde $c(t) = (3\cos(t); 3\sin(t); -1)$ para $t \in [0,2\pi]$.

P1) Calcular la integral de línea si $F: R^2 \to R^2$el campo $F(x,y) = (3x^2+2y, e^y+x)$ a lo largo de curva parametrizada por $\alpha(t) = (0; -4t+2)$ para $t \in [0,1]$. Y luego calcule $\oint_\beta F\,ds$, donde $\beta(t) = (2\cos(t); 2\sin(t))$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

P2) Calcule la circulación del campo $F(x,y,z)$ cuyo rotor es $\nabla \times F = (-y, 1, zx)$ a lo largo de la curva borde de superficie $z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$ con $z \geq 1$. Indique en un gráfico el sentido de orientación de la misma. ¿ Es conservativo el campo?

P3) Sea $F: R^3 \to R^3$ el campo $F(x,y,z) = (y^2z^2; x^2z^2; 2z+2xy)$ y S la superficie determinada por $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ con $z \geq 0$ y orientada con vectores normales con tercera coordenada negativa. Hallar el flujo de F a través de S.

P4) Halle la solución de la ecuación $y'' - 9y = 1$ que verifica $y(0) = -1, y'(0) = 1$.

(resuelto por Sylvina)

AM2	2° Parcial	1/3
	Curso de verano	24-2-25

1 a) Enunciar el teorema de cambio de variables en el cálculo de una integral triple con las hipótesis correspondientes

- D y D^* son dos regiones
- T es una transformación : $T: D \to D^*$

$$T_{(u,v,w)} = \left(X_{(u,v,w)},\ Y_{(u,v,w)},\ Z_{(u,v,w)}\right)$$

- $f: D \to \mathbb{R}$

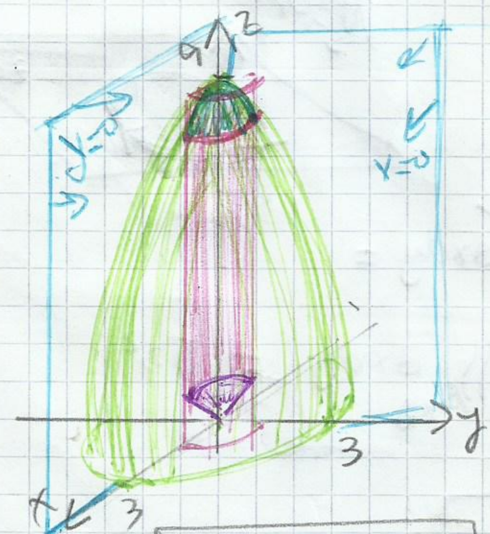
Entonces:

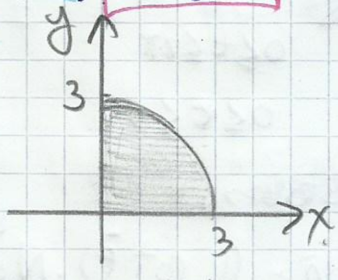
$$\iiint_D f_{(x,y,z)}\, dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f_{(T(u,v,w))} \cdot |J|\, du\,dv\,dw$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}}$$

b) Utilizando cambio de coord. adecuado describir la región de $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x \geq 0;\ y \geq 0;\ x^2+y^2 \leq 1 \ \wedge\ x+y \leq z \leq 9-x^2-y^2\}$$





$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_t & x'_z \\ y'_r & y'_t & y'_z \\ z'_r & z'_t & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & -r\,\text{sen}(t) & 0 \\ \text{sen}(t) & r\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 3 \\ r(\cos(t)+\text{sen}(t)) \leq z \leq 9-r^2 \end{matrix}}$$

$$= 1\cdot\left(\cos(t)\cdot r\cos(t) - (-r\,\text{sen}(t)\,\text{sen}(t))\right) =$$

$$= r\cos^2(t) + r\,\text{sen}^2(t) = \boxed{r = J}$$

$$z \geq x+y = r\cos(t) + r\,\text{sen}(t) = r\,(\cos(t)+\text{sen}(t))$$

$$z \leq 9 - x^2 - y^2 = 9 - r^2$$

(resuelto por Sylvina)

T2 a) Enunciar el teorema de Stokes

Hip. $\begin{cases} \bullet\ C \text{ es una curva cerrada, frontera de } S \\ \bullet\ S \text{ sup. orientable (gráfica de una función } C^2) \\ \bullet\ \bar{F} = (P, Q, R) \quad \bar{F} \in C^1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})\, d\bar{s}$$

b) Sea: $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo $\bar{F}_{(x,y,z)} = (y^2\cos(x) + z^3; -4 + 2y\,\text{sen}(x); 3xz^2 + z)$

Si $\bar{G}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el campo $\bar{G}_{(x,y,z)} = \bar{F}(x,y,z) + (z, x, y)$, calcular $\oint_C \bar{G}\, d\bar{s}$

donde $C(t) = (3\cos(t), 3\,\text{sen}(t), -1)\ \forall t \in [0, 2\pi]$

$$\bar{G}_{(x,y,z)} = (\underbrace{y^2\cos(x) + z^3 + z}_{P}, \underbrace{-4 + 2y\,\text{sen}(x) + x}_{Q}, \underbrace{3xz^2 + z + y}_{R}) \to \bar{G} \in C^1 ✓$$

$C(0) = (3, 0, -1) = A$

$C(2\pi) = (3, 0, -1) = B$

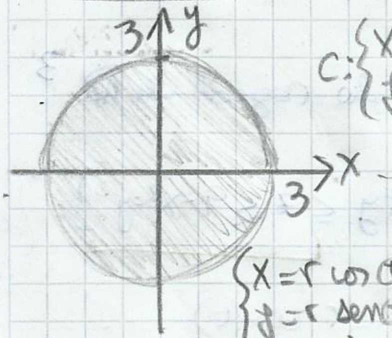
$\Big\} A = B \to C$ es curva cerrada ✓

Busco S:

$$C(t) = (\overbrace{3\cos(t)}^{x}, \overbrace{3\,\text{sen}(t)}^{y}, \overbrace{-1}^{z})$$

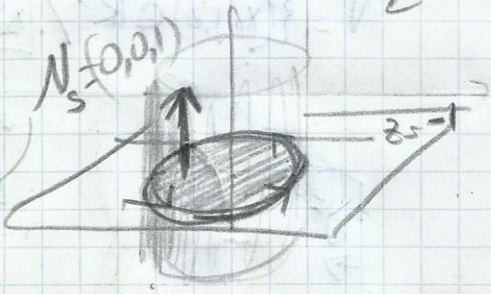
$C: \begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\,\text{sen}(t) \end{cases} \to x^2 + y^2 = 9$

$\boxed{z = -1}$ ¡Plano! ✓



$S: \begin{cases} z = -1 \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{cases} \leftarrow C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = -1 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi \quad 0 \le r \le 3$



$N_s = (0, 0, 1)$

$z = -1$

Se cumplen las hip. T Stokes:

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{F})\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} \operatorname{rot}(\bar{F}) \cdot N\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} (1, 1, 1)(0, 0, 1)\, dx\, dy = \boxed{\iint_{S_{xy}} dx\, dy} = \pi 3^2$$

Area?

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = 9\pi}$$

$$\operatorname{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$$

$$= (1 - 0, \cancel{3z^2} + 1 - \cancel{3z^2}, \cancel{2y\cos(x)} + 1 - \cancel{2y\cos(x)}) \to \boxed{\operatorname{rot}(\bar{F}) = (1, 1, 1)}$$

(resuelto por Sylvina)

AM2	2° parcial		2/3
	Curso de verano	Lezcano	24-2-25

(P1) Calcular la integral de línea si $\bar{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, el campo $\bar{F}(x,y) = (3x^2+2y\,,\, e^y + x)$ a lo largo de la curva parametrizada por $\alpha(t) = (0\,,\,-4t+2)$ $t \in [0,1]$

Luego calcular $\oint_\beta \bar{F}\, d\bar{s}$ donde $\bar{\beta}(t) = (2\cos(t)\,,\, 2\,\text{sen}(t))$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = A = (0,2) \\ \alpha(1) = B = (0,-2) \end{array}\right\}$ curva abierta

$\bar{F} = (P,Q)$

$\left.\begin{array}{l} Q'_x = 1 \\ P'_y = 2 \end{array}\right\rangle \neq$

$\bar{F}$ no es campo conserv.

$\bar{\alpha}'(t) = (0,-4)$

$$\oint_{\alpha(t)} \bar{F}\, d\bar{l} = \int_{\alpha(t)} \bar{F}(\alpha(t))\, \alpha'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2(-4t+2)\,;\, e^{-4t+2}\right)(0,-4)\, dt =$$

$$= \int_0^1 -4e^{-4t+2}\, dt = e^{-4t+2}\Big|_0^1 = \boxed{e^{-2} - e^2 = \int_{\alpha(t)} \bar{F}\, d\bar{l}}$$

$\bar{\beta}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{Inicio} = (0,-2) = B$

$\bar{\beta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{fin} = (0,2) = A$

$\bar{\beta}'(t) = (-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t))$

$$\oint_{\bar{\beta}(t)} \bar{F}\, d\bar{l} = \int_{\beta(t)} \bar{F}(\beta(t))\, \bar{\beta}'(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{3(2\cos(t))^2}_{12\cos^2(t)} + \overbrace{2(2\,\text{sen}(t))}^{4\,\text{sen}(t)}\,;\, e^{2\,\text{sen}(t)} + 2\cos(t)\Big)(-2\,\text{sen}(t), 2\cos(t))\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -24\cos^2(t)\,\text{sen}(t) - 8\,\text{sen}^2(t) + 2\cos(t)\, e^{2\,\text{sen}(t)} + 4\cos^2(t)\, dt =$$

$$= 0 - 4\pi + 7{,}25372081 6 + 2\pi = 0{,}9705$$

$$\boxed{\oint_{\bar{\beta}(t)} \bar{F}\, d\bar{l} = 0{,}9705}$$

$-2\pi - e^{-2} + e^2$

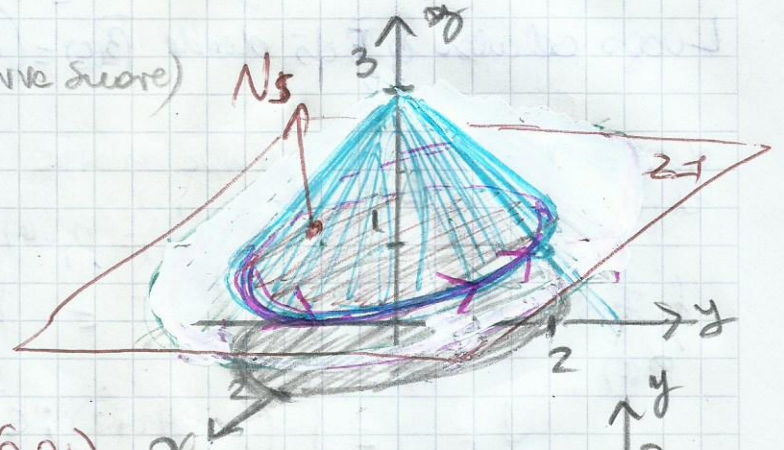
(resuelto por Sylvina)

(P2) Calcular la circulación del campo $\bar{F}(x,y,z)$ cuyo rotor es $\nabla \times \bar{F} = (-y, 1, zx)$ a lo largo de la curva borde de sup $z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$ con $z \geq 1$

Indicar, en un gráfico, el sentido de orientación de la misma

¿Es conservativo el campo?

$$\nabla \times \bar{F} = (-y, 1, zx) \neq (0,0,0) \Rightarrow \bar{F} \text{ no es conservativo}$$



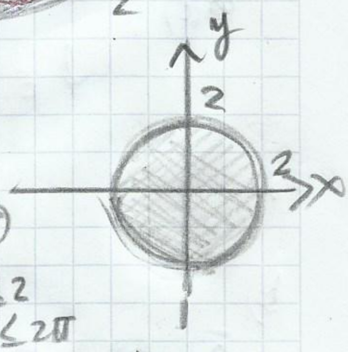
- C es curva frontera de S. (curva suave)

$$C: \begin{cases} z = 3 - \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{x^2+y^2 = 4}$$

reescribo: $C: \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

- S $\rightarrow$ disco $r = 2$ en $z = 1$

$\rightarrow N = (0,0,1)$



- $\nabla \times F \in C^\infty \rightarrow \bar{F} \in C^1$ ✓

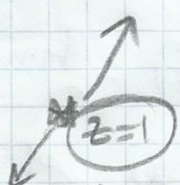
$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq t \leq 2\pi$

T. Stokes:

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, d\bar{s} =$$



$$= \iint_{S_{xy}} \text{rot}(\bar{F}) \cdot N\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} (-y, 1, zx)(0,0,1)\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} zx\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} x\, dx\,dy = 0$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = 0}$$

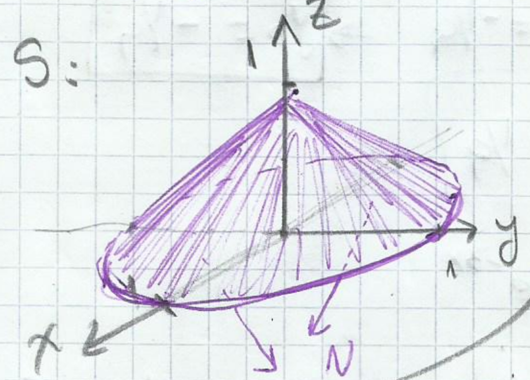
(resuelto por Sylvina)

AM2	2° parcial Curso de verano	3|3 24-2-25

(P3) Sea $\bar{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo $\bar{F}(x,y,z) = (y^2z^2, x^2z^2, 2z+2xy)$ y la sup. determinada por $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ con $z \geq 0$ y orientada con vectores normales con tercera componente negativa.

Hallar el flujo de $\bar{F}$ a través de S

S:



$S:\ z = 1-\sqrt{x^2+y^2} \qquad z \geq 0$

$\sqrt{x^2+y^2} = 1-z \Rightarrow x^2+y^2 = (1-z)^2$

$G(x,y,z) = x^2+y^2-(1-z)^2$

$N_S = \dfrac{\nabla G}{|G'_z|} = \left(\dfrac{2x}{2(1-z)}, \dfrac{2y}{2(1-z)}, \dfrac{-2(1-z)}{2(1-z)}\right)$

$N_S = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}, -1\right)$ ✓

$$\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} F\cdot N\,dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (y^2z^2, x^2z^2, 2z+2xy)\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, -1\right)dx\,dy$$

$\boxed{1-z = \sqrt{x^2+y^2}}$

$$= \iint_{S_{xy}} \frac{xy^2z^2}{1-z} + \frac{x^2yz^2}{1-z} - 2z - 2xy\,dx\,dy =$$

$\boxed{z^2 = (1-\sqrt{x^2+y^2})^2}$

$$= \iint_{S_{xy}} \frac{xy^2(1-\sqrt{x^2+y^2})^2 + x^2y(1-\sqrt{x^2+y^2})^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2(1-\sqrt{x^2+y^2}) - 2xy\,dx\,dy =$$

$$\text{C.V.} = \iint_{S^*_{xy}} \overset{Jac}{r}\left[\frac{r\cos(t)\,r^2\operatorname{sen}^2(t)(1-r)^2 + r^2\cos^2(t)\,r\operatorname{sen}(t)(1-r)^2}{r} - 2 + 2r - 2r\cos\operatorname{sen}\right]dr\,dt$$

$$= \iint_{S_{xy}} \underbrace{r^3\cos(t)\operatorname{sen}^2(t)(1-r)^2}_{0\text{ a }2\pi = 0} + \underbrace{r^3\cos^2(t)\operatorname{sen}(t)(1-r)^2}_{0\text{ a }2\pi = 0} - 2r + 2r^2 - \underbrace{2r^3\cos(t)\operatorname{sen}(t)}_{\text{de }0\text{ a }2\pi = 0}\,dr\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2r+2r^2\,dr\,dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\,dt = \boxed{-\frac{2}{3}\pi = \iint_S \bar{F}\,d\bar{s}}$$

(resuelto por Sylvina)

P4) : Hallar la sol. de la ec.: $y'' - 9y = 1$ que verifica: $y(0) = -1$
$y'(0) = 1$

S.H) $y'' - 9y = 0$

$r^2 - 9 = 0 \to r_1 = 3,\ r_2 = -3$

$$\boxed{y_H = Ae^{3x} + Be^{-3x}}$$

$C, A, B \in \mathbb{R}$

SP) $y_P = C \to y' = 0 = y''$

$0 - 9C = 1 \to C = -1/9 \to \boxed{y_P = -1/9}$

$$\boxed{y_G = Ae^{3x} + Be^{-3x} - 1/9}$$

$$y'_G = 3Ae^{3x} - 3Be^{-3x}$$

$y(0) = -1 = A + B - 1/9$
$y'(0) = 1 = 3A - 3B$
$\to \begin{cases} A + B = -8/9 \\ 3A - 3B = 1 \end{cases} \to A = -5/18,\ B = -11/18$

$$\boxed{y_{(x)} = \frac{-5}{18}e^{3x} - \frac{11}{18}e^{-3x} - \frac{1}{9}}$$

(resuelto por Sylvina)